Mekanik och Hållfasthetslära, IEI, LiTH
Stefan Lindström 11 augusti 2017

Lösning av jämviktsekvationer med Matlab

Bakgrund

Jämviktsekvationerna för ett mekaniskt system av stela kroppar bildar ett linjärt ekvationssytem m.a.p obekanta kraftkomponenter och kraftparsmoment. Sådana kan lösas numeriskt med Matlab. Antag t.ex. att jämvikt ställts upp för ett plant system av två stelkroppar med sex obekanta, $F_{\mathcal{A}}$, $C_{\mathcal{A}}$, $F_{\mathcal{O}x}$, $F_{\mathcal{O}y}$, $F_{\mathcal{B}}$ och $F_{\mathcal{D}}$, vilket givit ekvationssystemet

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathcal{B}} + F_{\mathcal{D}} - 4mg + F_{\mathcal{O}y} = 0 \tag{1a}$$
$$\frac{1}{2}F_{\mathcal{B}} + \frac{1}{2}F_{\mathcal{O}x} = 0 \tag{1b}$$
$$-2LF_{\mathcal{D}} + 2L\,4mg - 4LF_{\mathcal{O}y} - LF_{\mathcal{O}x} - 2mgL = 0 \tag{1c}$$
$$-F_{\mathcal{O}y} - 4mg - \frac{3}{2}mg + \frac{1}{2}F_{\mathcal{A}} = 0 \tag{1d}$$
$$-F_{\mathcal{O}x} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathcal{A}} = 0 \tag{1e}$$
$$-2LF_{\mathcal{O}x} - 4LF_{\mathcal{O}y} - L\,4mg - C_{\mathcal{A}} = 0, \tag{1f}$$

där $F_{\mathcal{A}}$ efterfrågas.

Dimensionslösa variabler

Genom att dividera kraftjämvikterna med en karaktäristisk kraft, mg, och momentjämvikterna, ekv. (1c) och (1f), med ett karaktäristiskt moment, mgL, erhålles

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F_{\mathcal{B}}}{mg} + \frac{F_{\mathcal{D}}}{mg} + \frac{F_{\mathcal{O}y}}{mg} = 4 \tag{2a}$$
$$\frac{1}{2}\frac{F_{\mathcal{B}}}{mg} + \frac{1}{2}\frac{F_{\mathcal{O}x}}{mg} = 0 \tag{2b}$$
$$-2\frac{F_{\mathcal{D}}}{mg} - 4\frac{F_{\mathcal{O}y}}{mg} - \frac{F_{\mathcal{O}x}}{mg} = -6 \tag{2c}$$
$$-\frac{F_{\mathcal{O}y}}{mg} + \frac{1}{2}\frac{F_{\mathcal{A}}}{mg} = \frac{11}{2} \tag{2d}$$
$$-\frac{F_{\mathcal{O}x}}{mg} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F_{\mathcal{A}}}{mg} = 0 \tag{2e}$$
$$-2\frac{F_{\mathcal{O}x}}{mg} - 4\frac{F_{\mathcal{O}y}}{mg} - \frac{C_{\mathcal{A}}}{mgL} = 4, \tag{2f}$$

där varje term är dimensionslös. En variabelsubstitution ger dimensionslösa variabler

$$x_1 = \frac{F_{\mathcal{A}}}{mg}, \quad x_2 = \frac{C_{\mathcal{A}}}{mgL}, \quad x_3 = \frac{F_{\mathcal{O}x}}{mg}, \quad x_4 = \frac{F_{\mathcal{O}y}}{mg}, \quad x_5 = \frac{F_{\mathcal{B}}}{mg}, \quad x_6 = \frac{F_{\mathcal{D}}}{mg},$$

med vilka ekv. (2a) till (2f) kan skrivas om:

$$x_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_5 + x_6 = 4 \tag{3a}$$

$$\frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \tag{3b}$$

$$-x_3 - 4x_4 - 2x_6 = -6 \tag{3c}$$

$$\frac{1}{2}x_1 - x_4 = \frac{11}{2} \tag{3d}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - x_3 = 0 \tag{3e}$$

$$-x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4. \tag{3f}$$

Numerisk lösning

Ekvationerna (3a) till (3f) kan nu skrivas på matrisform $\bar{\bar{A}}\bar{x} = \bar{b}$ enligt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \\ \frac{11}{2} \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\bar{b}}. \tag{4}$$

Genom att definiera matrisen $\bar{\bar{A}}$ och kolonnvektorn $\bar{b}$ som variablerna `A` och `b` i Matlab kan man lösa ekvationsystemet med den inbyggda *backslash*-operatorn:

```
>> x = A \ b
x =

1.0e+01  *

-0.65885
1.97654
0.57058
-0.87942
-0.57058
1.77356
```

Enligt denna lösning gäller

$$\frac{F_{\mathcal{A}}}{mg} = x_1 = -6{,}5885 \quad \Leftrightarrow \quad F_{\mathcal{A}} = -6{,}5885\, mg.$$