Linköpings universitet
tekniska högskolan
IEI/mekanik

Tentamen – Mekanik MI, TMMI03

Lördagen den 3 juni 2014, klockan 14–18

Kursadministratör

Anna Wahlund, anna.wahlund@liu.se, 013-281157

Examinator

Joakim Holmberg

Tentamensjour

Joakim Holmberg, joakim.holmberg@liu.se, 013-282338

Besöker salen

15:30

Antal uppgifter

5 stycken uppgifter, där varje uppgift ger maximalt 3 poäng

Antal sidor

7 stycken (inklusive försättsblad)

Hjälpmedel

Formelblad (medföljer tentamenstesen) samt räknedosa

Betygsgränser

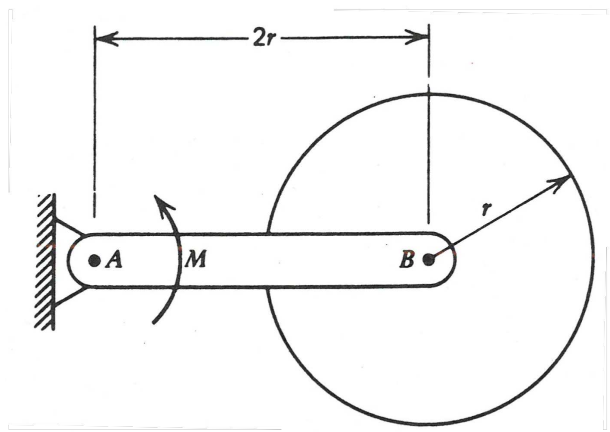
Summa poäng	Betyg
0–5	UK
6–8	3
9–11	4
12–15	5

Svar

Anslås på kurshemsidan efter skrivtidens slut
http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor_Level/tmmi03/

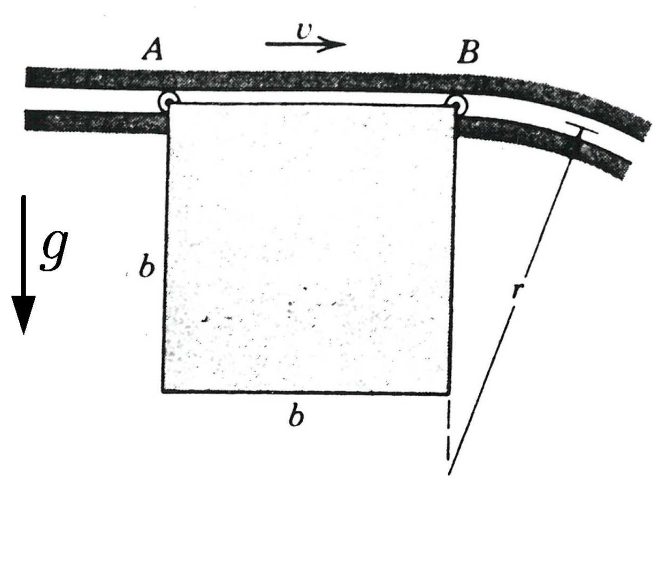
Tentamen i Mekanik (TMMI03)

1 Den tunna stången $\mathcal{AB}$ med massan m och längden $2r$ sitter i en friktionsfri gångjärnsled vid $\mathcal{A}$. En cirkulär skiva med massan m och radien r sitter (vid sitt masscentrum) fast i stången vid punkten $\mathcal{B}$. Jämför kraftparsmomentet M som måste appliceras på stången för att stångens vinkelacceleration ska bli α då: a) kontakten vid $\mathcal{B}$ är en friktionsfri sprint, respektive b) kontakten vid $\mathcal{B}$ är en punktsvets. Stång och skiva är från början i vila. All rörelse sker i ett horisontalplan. (3p)



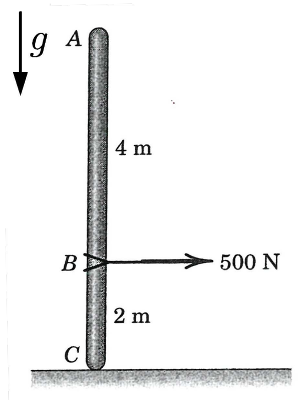
---

2 En kvadratisk platta med massan m är upphängd i ett vertikalplan via de friktionsfria hörnhjulen $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$. Hjulens radie är försumbar. Plattans masscentrum har farten v åt höger precis då hjulet $\mathcal{B}$ går in i kurvan (den cirkulära delen av banan) med krökningsradien r. Vid detta ögonblick, bestäm normalkraften från banan på hjul $\mathcal{A}$ respektive $\mathcal{B}$. (3p)



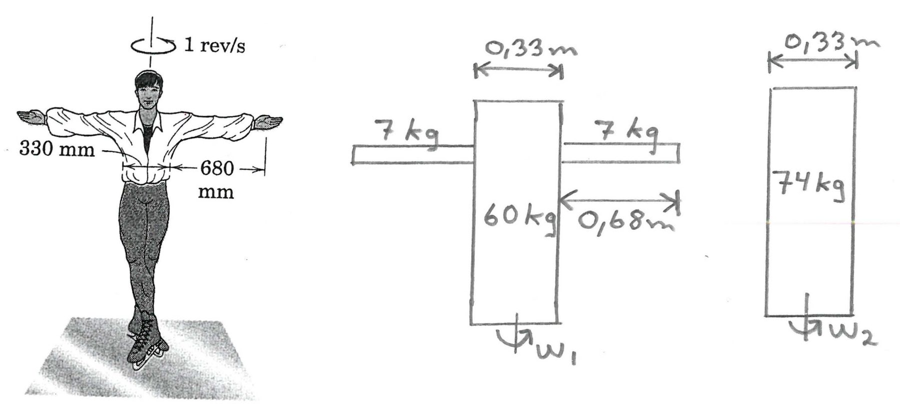
3 Stången $\mathcal{ABC}$, med massan 50 kg, balanserar i vertikal position när en horisontell kraft på 500 N appliceras vid $\mathcal{B}$. I kontaktpunkten vid $\mathcal{C}$ är friktionskoefficienten $\mu_s = \mu_k = \mu = 0.3$.

- Visa att stången börjar att röra på sig vid $\mathcal{C}$ när kraften vid $\mathcal{B}$ appliceras. (1p)
- Bestäm accelerationsvektorn $\overline{a}_{\mathcal{A}}$ precis när kraften vid $\mathcal{B}$ appliceras. (2p)



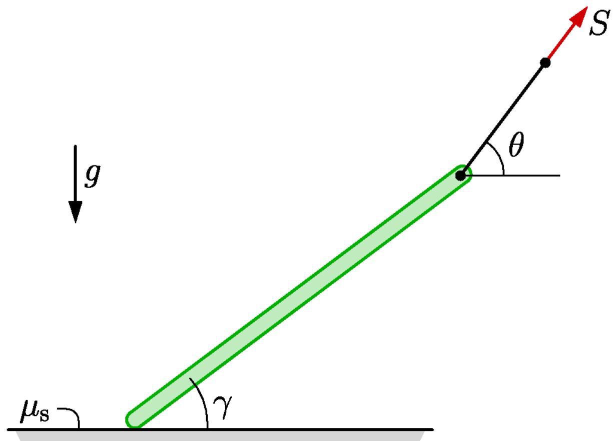
---

4 En konståkare med massan 74 kg roterar med 1 varv/sekund kring sin vertikala axel då armarna är utsträckta. Uppskatta rotationsfarten som uppstår då armarna dras in och placeras längs med kroppen. Approximera armarna som tunna stänger då de är utsträckta och övriga kroppen som en solid cylinder. Efter att armarna har dragits in och placerats längs med kroppen kan de anses ingå i en solid cylinder tillsammans med den övriga kroppen, se figur. Kontakten med isen är friktionsfri. (3p)



5 Ena änden av en smal stång med massan m vilar mot ett horisontellt underlag. Den statiska friktionskoefficienten är μ_s. Stångens andra ände är fäst i ett sträckt snöre. Då stången börjar glida har snöret vinkeln θ gentemot horisontalplanet.

- Visa att $\theta = \arctan\left(\frac{1}{\mu_s} + 2\tan\gamma\right)$. (3p)



---

punkt.

Formelblad TMMI03

Statik

- Kraft- och momentlag

$$\Sigma\overline{F} = 0, \quad \Sigma\overline{M} = 0$$

- Friktion

Det statiska friktionsvillkoret är

$$F \leq \mu_s N$$

där F är friktionskraftens belopp och N är normalkraftens belopp.
Vid glidning gäller

$$F = \mu_k N$$

- Masscentrum (tyngdpunkt, geometriskt centrum)

$$\overline{r}_G = \begin{cases} \frac{\int \overline{r} dV}{V}, & \text{för 3D-kropp} \\ \frac{\int \overline{r} dA}{A}, & \text{för 2D-kropp} \\ \frac{\int \overline{r} dL}{L}, & \text{för 1D-kropp} \end{cases}$$

Till exempel: $X_G = \frac{1}{A}\int x_c dA$.

Kinematik

- Differentialsambandet (här i rektangulära koordinater)

$$v dv = a ds$$

- Naturliga komponenter

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{e}_t = \rho\dot{\beta}\overline{e}_t, \qquad \overline{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{e}_n + \ddot{s}\overline{e}_t$$

- Polära koordinater

$$\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta, \qquad \overline{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

- Hastighets- och accelerationssamband. Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\overline{v}_\mathcal{B} = \overline{v}_\mathcal{A} + \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}$$
$$\overline{a}_\mathcal{B} = \overline{a}_\mathcal{A} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}\right) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\mathcal{AB}}$$

Kinetik

- Kraft- och momentlagar

$$\Sigma\overline{F} = \dot{\overline{G}} = m\overline{a}_\mathcal{G}$$
$$\Sigma\overline{M}_\mathcal{G} = \dot{\overline{H}}_\mathcal{G}, \qquad \Sigma\overline{M}_\mathcal{P} = \dot{\overline{H}}_\mathcal{P}$$

- Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_\mathcal{G} = I_\mathcal{G}\alpha, \qquad \Sigma M_\mathcal{O} = I_\mathcal{O}\alpha$$

- Förflyttningssatser

$$\overline{H}_\mathcal{B} = \overline{H}_\mathcal{A} + \overline{\mathcal{BA}} \times m\overline{v}_\mathcal{G}$$
$$\Sigma\overline{M}_\mathcal{B} = \Sigma\overline{M}_\mathcal{A} + \overline{\mathcal{BA}} \times \Sigma\overline{F}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\overline{H}_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}}\overline{\omega}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\overline{\omega}$$

- Tröghetssamband

$$I_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{G}} + md^2, \qquad I_{\mathcal{G}} = \int r^2 dm$$

- Arbete och energi

Energibalans

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

där En kraft $\overline{F}$ resp. ett kraftparsmoment $\overline{C}$ utför arbetet

$$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{C}\cdot\overline{\omega} dt$$

$$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 C\, d\theta \qquad \text{(2D)}$$

Plan rörelse

$$T = \frac{1}{2}mv_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{G}}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}I_{\mathcal{O}}\omega^2$$

- Impuls och impulsmoment

$$\overline{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{F}dt = \overline{G}_2, \quad \overline{G} = m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$

$$\overline{H}_{\mathcal{P}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}}dt = \overline{H}_{\mathcal{P}_2}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{G}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}}dt = \overline{H}_{\mathcal{G}_2}$$

- Stöttal

$$e = \frac{v_2^{'} - v_1^{'}}{v_1 - v_2}$$

Algebra

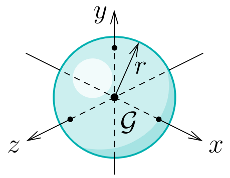
$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a})$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}\,(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$$

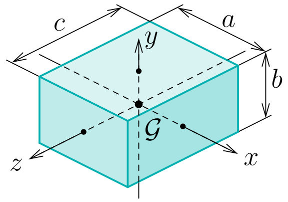
Tröghetsmatrisens diagonal $I_{\mathcal{G}xx}$, $I_{\mathcal{G}yy}$ och $I_{\mathcal{G}zz}$ m.a.p. masscentrum $\mathcal{G}$ för tredimensionella kroppar, skal och stänger med jämnt fördelad massa m.

klot



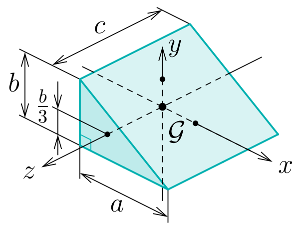
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = I_{\mathcal{G}zz} = \frac{2}{5}mr^2$$

rätblock



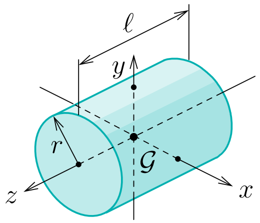
$$I_{\mathcal{G}xx} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

rätvinkligt prisma



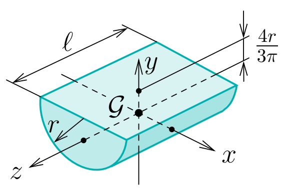
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{18}m(a^2 + b^2)$$

cylinder



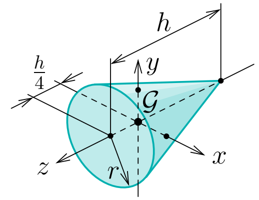
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{2}mr^2$$

halvcylinder



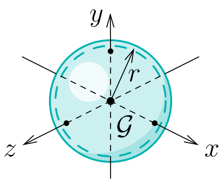
$$I_{\mathcal{G}xx} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$$

kon



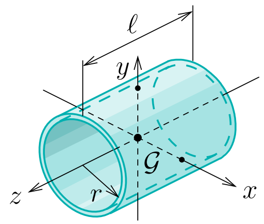
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{3}{10}mr^2$$

sfäriskt skal



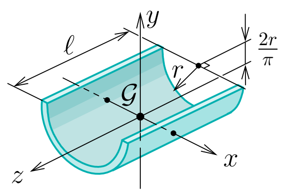
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = I_{\mathcal{G}zz} = \frac{2}{3}mr^2$$

cylinderskal



$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = mr^2$$

halvcylinderskal



$$I_{\mathcal{G}xx} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$$