Linköpings universitet
tekniska högskolan
IEI/mekanik

Tentamen – Mekanik MI, TMMI03

Torsdagen den 26 oktober 2014, klockan 14–18

Kursadministratör

Lena Sundling, lena.sundling@liu.se, 013-281106

Examinator

Joakim Holmberg

Tentamensjour

Stefan Lindström, stefan.lindstrom@liu.se, 013-281127

Besöker salen

15:30

Antal uppgifter

5 stycken uppgifter, där varje uppgift ger maximalt 3 poäng

Antal sidor

7 stycken (inklusive försättsblad)

Hjälpmedel

Formelblad (medföljer tentamenstesen) samt räknedosa

Betygsgränser

Summa poäng	Betyg
0–5	UK
6–8	3
9–11	4
12–15	5

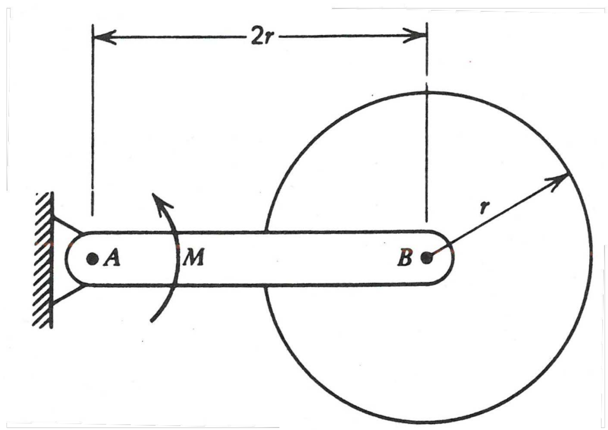
Svar

Anslås på kurshemsidan efter skrivtidens slut
http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor_Level/tmmi03/

Tentamen i Mekanik (TMMI03)

1 Den tunna stången $\mathcal{AB}$ med massan m och längden $2r$ sitter i en friktionsfri gångjärnsled vid $\mathcal{A}$. En cirkulär skiva med massan m och radien r sitter (vid sitt masscentrum) fast i stången vid punkten $\mathcal{B}$. Stång och skiva är från början i vila då kraftparsmomentet M appliceras på stången $\mathcal{AB}$ enligt figur. All rörelse sker i ett horisontalplan.

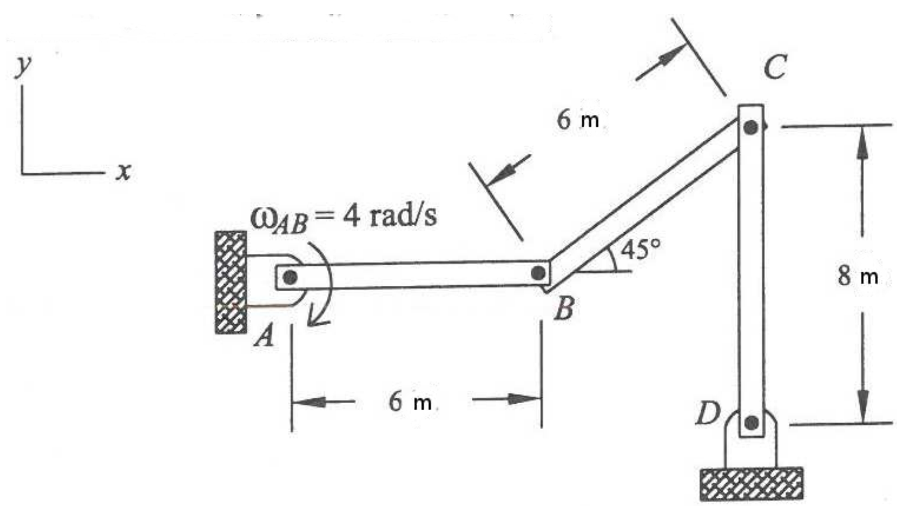
- Bestäm vinkelaccelerationen för länken $\mathcal{AB}$, $\alpha_{\mathcal{AB}}$, då kontakten vid $\mathcal{B}$ är en friktionsfri sprint. (2p)
- Bestäm vinkelaccelerationen för länken $\mathcal{AB}$, $\alpha_{\mathcal{AB}}$, då kontakten vid $\mathcal{B}$ är en punktsvets. (1p)



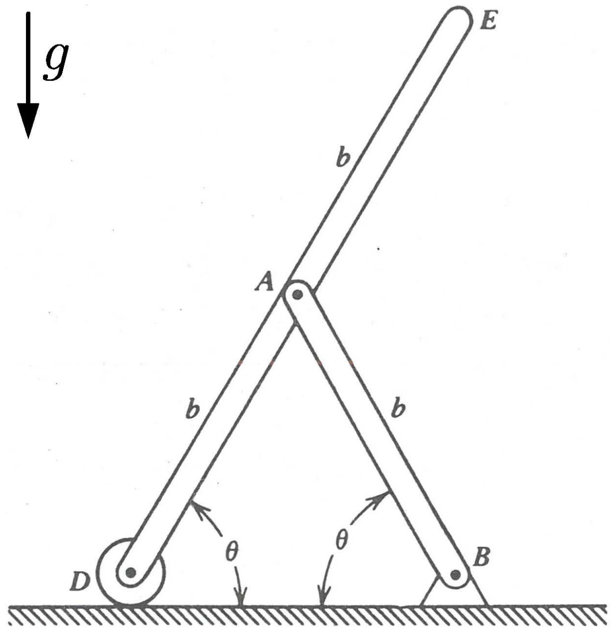
---

2 Knutpunkterna i länksystemet består av friktionsfria sprintar. I punkt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{D}$ är det gångjärnsleder. Mått enligt figur. Länken $\mathcal{AB}$ roterar med den konstanta vinkelhastigheten $\overline{\omega}_{\mathcal{AB}} = -4\overline{k}$ rad/s (dvs $\overline{\alpha}_{\mathcal{AB}} = \overline{0}$).

- Bestäm vinkelhastighetsvektorn för länken $\mathcal{BC}$, $\overline{\omega}_{\mathcal{BC}}$, i det läge som figuren visar. (1p)
- Bestäm vinkelaccelerationsvektorn för länken $\mathcal{BC}$, $\overline{\alpha}_{\mathcal{BC}}$, i det läge som figuren visar. (2p)



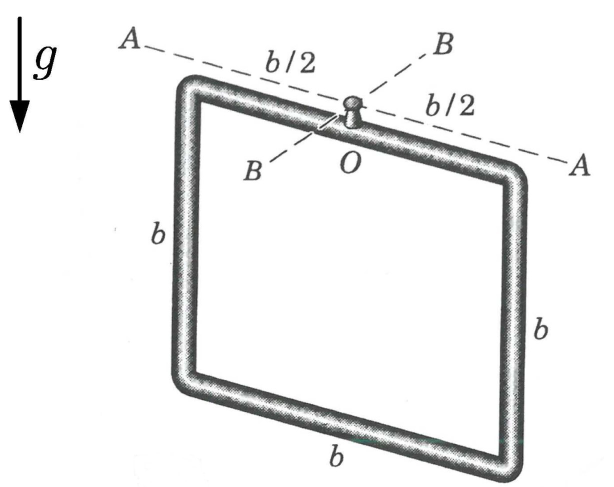
3 Stången $\mathcal{AB}$, med massan m, är friktionsfritt ledad med stången $\mathcal{DAE}$, med massan $2m$, vid punkten $\mathcal{A}$. Vid punkten punkten $\mathcal{B}$ är det en friktionsfri gångjärnsled. Vid punkten $\mathcal{D}$ är det en friktionsfri och masslös rulle. Om konstruktionen släpps då vinkeln θ i princip är $90°$, bestäm stängernas vinkelhastighet ω då $\theta = 60°$. Figuren visar ett godtyckligt läge efter släppet. Ledning: $\overline{\omega}_{\mathcal{AB}} = -\overline{\omega}_{\mathcal{DAE}}$ och $\omega_{\mathcal{AB}} = \omega_{\mathcal{DAE}} = \omega$. (3p)



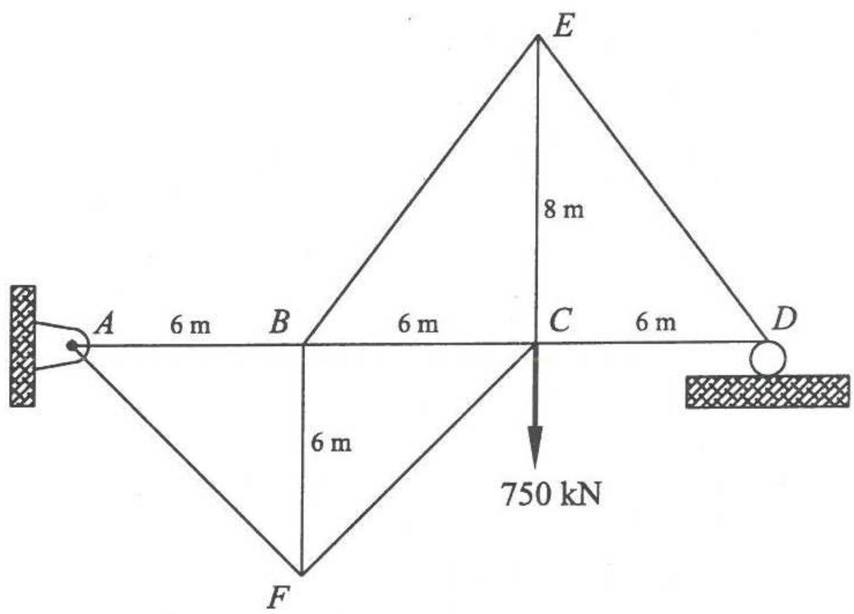
---

4 En kvadratisk ram består av 4 stycken tunna stänger, vardera med längden b och massan m. Ramen är upphängd med en friktionsfri kulled i punkten $\mathcal{O}$. Från positionen i figuren så roteras ramen $\pi/4$ kring axeln $\mathcal{B}-\mathcal{B}$, hålls stilla, för att sedan släppas. Försumma det lilla avståndet mellan axeln $\mathcal{B}-\mathcal{B}$ och ramens överliggare.

- Bestäm ramens masströghetsmoment med avseende på punkten $\mathcal{O}$ och axeln $\mathcal{B}-\mathcal{B}$, $I_{\mathcal{O},\mathcal{B}-\mathcal{B}}$. (1p)
- Bestäm ramens vinkelacceleration α omedelbart efter släppet. (2p)



5 Knutpunkterna i stångbärverket består av friktionsfria sprintar. Mått och last enligt figur. I punkt $\mathcal{A}$ är det en gångjärnsled och i punkt $\mathcal{D}$ är det en rulle. Bestäm kraften i stängerna $\mathcal{CF}$ och $\mathcal{CE}$. Ange också om det är drag- eller trycklast. (3p)



punkt.

Formelblad TMMI03

Statik

• Kraft- och momentlag

$$\Sigma\overline{F} = 0, \quad \Sigma\overline{M} = 0$$

• Friktion
Det statiska friktionsvillkoret är

$$F \leq \mu_s N$$

där F är friktionskraftens belopp och N är normalkraftens belopp.
Vid glidning gäller

$$F = \mu_k N$$

• Masscentrum (tyngdpunkt, geometriskt centrum)

$$\overline{r}_G = \begin{cases} \frac{\int \overline{r} dV}{V}, & \text{för 3D-kropp} \\ \frac{\int \overline{r} dA}{A}, & \text{för 2D-kropp} \\ \frac{\int \overline{r} dL}{L}, & \text{för 1D-kropp} \end{cases}$$

Till exempel: $X_G = \frac{1}{A}\int x_c dA$.

Kinematik

• Differentialsambandet (här i rektangulära koordinater)

$$vdv = ads$$

• Naturliga komponenter

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{e}_t = \rho\dot{\beta}\overline{e}_t, \qquad \overline{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{e}_n + \ddot{s}\overline{e}_t$$

• Polära koordinater

$$\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta, \qquad \overline{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

• Hastighets- och accelerationssamband. Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\overline{v}_\mathcal{B} = \overline{v}_\mathcal{A} + \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}$$
$$\overline{a}_\mathcal{B} = \overline{a}_\mathcal{A} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}\right) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\mathcal{AB}}$$

Kinetik

• Kraft- och momentlagar

$$\Sigma\overline{F} = \dot{\overline{G}} = m\overline{a}_\mathcal{G}$$
$$\Sigma\overline{M}_\mathcal{G} = \dot{\overline{H}}_\mathcal{G}, \qquad \Sigma\overline{M}_\mathcal{P} = \dot{\overline{H}}_\mathcal{P}$$

• Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_\mathcal{G} = I_\mathcal{G}\alpha, \qquad \Sigma M_\mathcal{O} = I_\mathcal{O}\alpha$$

• Förflyttningssatser

$$\overline{H}_\mathcal{B} = \overline{H}_\mathcal{A} + \overline{\mathcal{BA}} \times m\overline{v}_\mathcal{G}$$
$$\Sigma\overline{M}_\mathcal{B} = \Sigma\overline{M}_\mathcal{A} + \overline{\mathcal{BA}} \times \Sigma\overline{F}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\overline{H}_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}}\overline{\omega}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\overline{\omega}$$

- Tröghetssamband

$$I_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{G}} + md^2, \qquad I_{\mathcal{G}} = \int r^2 dm$$

- Arbete och energi

  Energibalans

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

  där En kraft $\overline{F}$ resp. ett kraftparsmoment $\overline{C}$ utför arbetet

$$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{C} \cdot \overline{\omega} dt$$

$$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 C\, d\theta \qquad \text{(2D)}$$

  Plan rörelse

$$T = \frac{1}{2}mv_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2}I_{\mathcal{G}}\omega^2$$

$$T = \frac{1}{2}I_{\mathcal{O}}\omega^2$$

- Impuls och impulsmoment

$$\overline{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{F} dt = \overline{G}_2, \quad \overline{G} = m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$

$$\overline{H}_{\mathcal{P}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}} dt = \overline{H}_{\mathcal{P}_2}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{G}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}} dt = \overline{H}_{\mathcal{G}_2}$$

- Stöttal

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

Algebra

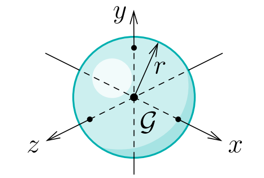
$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a})$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}\,(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$$

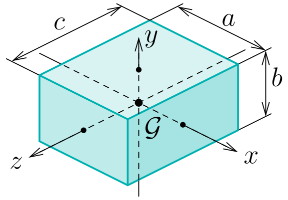
Tröghetsmatrisens diagonal $I_{\mathcal{G}xx}$, $I_{\mathcal{G}yy}$ och $I_{\mathcal{G}zz}$ m.a.p. masscentrum $\mathcal{G}$ för tredimensionella kroppar, skal och stänger med jämnt fördelad massa m.

klot



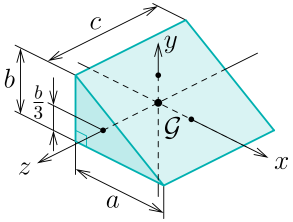
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = I_{\mathcal{G}zz} = \frac{2}{5}mr^2$$

rätblock



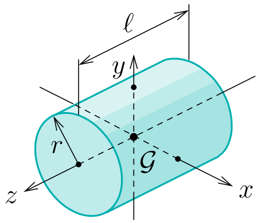
$$I_{\mathcal{G}xx} = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$$

rätvinkligt prisma



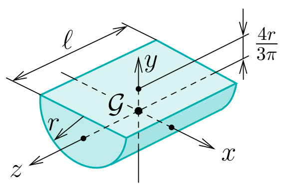
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{18}m(a^2 + b^2)$$

cylinder



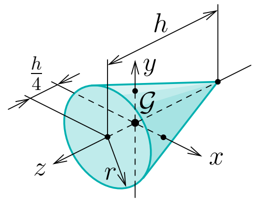
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{1}{2}mr^2$$

halvcylinder



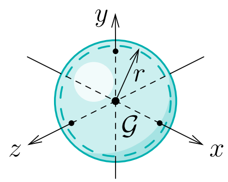
$$I_{\mathcal{G}xx} = \left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right)mr^2$$

kon



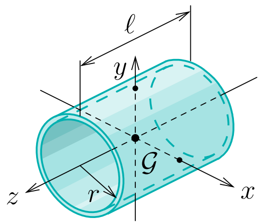
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \frac{3}{10}mr^2$$

sfäriskt skal



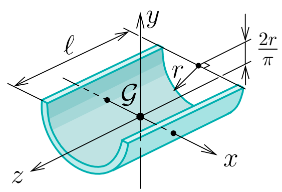
$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = I_{\mathcal{G}zz} = \frac{2}{3}mr^2$$

cylinderskal



$$I_{\mathcal{G}xx} = I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = mr^2$$

halvcylinderskal



$$I_{\mathcal{G}xx} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}yy} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$$
$$I_{\mathcal{G}zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)mr^2$$