Linköpings Tekniska
Högskola
IEI/Mekanik

20111217

Tentamen
i
Mekanik MI f.k.
TMMI39/Ten 1

Lördagen den 17 dec kl 14-19

SAL: **TER1**

Examinator:	Joakim Holmberg
Tentajour:	Joakim Holmberg tel 282338 eller 070-5556050
Besöker salen:	Kl 14.30 och kl 16.30
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	6 (inkl försättsblad)
Hjälpmedel:	Räknedosa (formelblad medföljer)

Rättning:	Summa poäng	Betyg
	0 -5	UK
	6-8	3
	9-11	4
	12-15	5

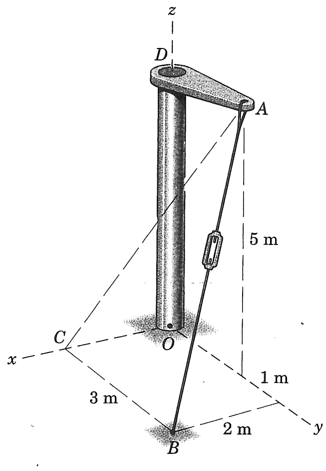
Svar anslås på Mekaniks anslagstavla
kl. 19.00 skrivningsdagen

Kursadministratör: Anna Wahlund tel 281157
anna.wahlund@liu.se

2011-12-17

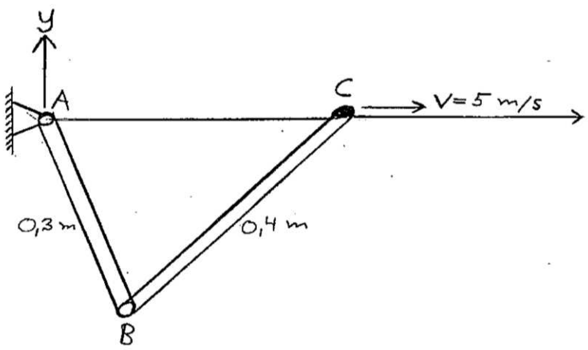
Tentamen i Mekanik f.k. (TMMI39)

1 Stagsträckaren åtskruvas tills dragkraften T i kabeln $\mathcal{AB}$ blir 2.4 kN. Bestäm vektorn $\overline{T}$ som verkar på staget $\mathcal{AD}$ (i punkten $\mathcal{A}$). Bestäm även storleken på projektionen av $\overline{T}$ längs linjen $\mathcal{AC}$. (3p)



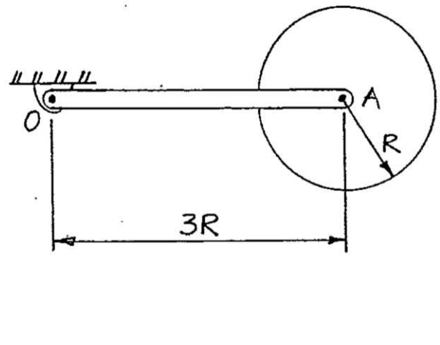
---

2 Två stänger $\mathcal{AB}$ och $\mathcal{BC}$ är friktionsfritt ledade i ändpunkterna $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$. $\mathcal{C}$ kan glida på x-axeln och ges en konstant fart $v = 5$ m/s i positiv x-led. Bestäm båda stångernas vinkelhastigheter ($\omega_{\mathcal{AB}}$ och $\omega_{\mathcal{BC}}$) då vinkeln $\mathcal{ABC}$ blir 90°. (3p)

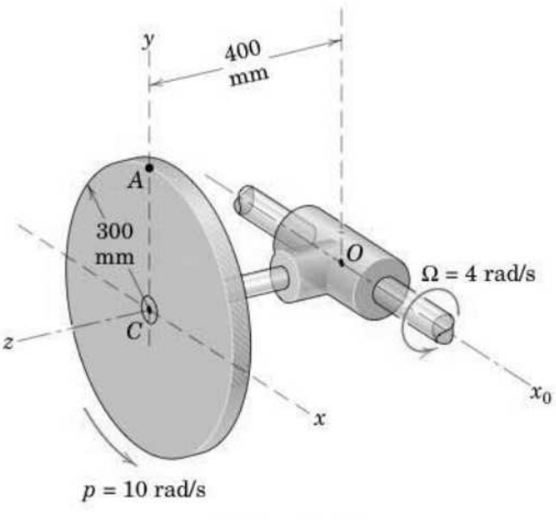


---

3 En skiva med radien R och massan m sitter fast i ena änden $\mathcal{A}$ av en stång $\mathcal{OA}$, vars massa kan försummas. Skivan är fastlåst vid $\mathcal{A}$, så den kan ej rotera kring sitt centrum. Stången $\mathcal{OA}$ kan rotera omkring en horisontell axel genom $\mathcal{O}$. Konstruktionen släpps från vila från det horisontella läge som figuren visar. Bestäm vinkelaccelerationen α samt kraften P på skivan i punkten $\mathcal{A}$ direkt efter det man släppt konstruktionen. (3p)

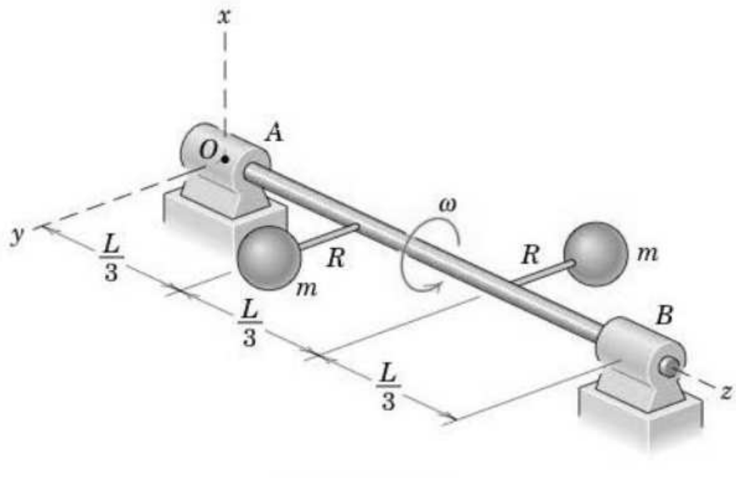


4 Om skivans spinnhastighet p ökar med 6 rad/s och om precessionen Ω håller konstant 4 rad/s, bestäm skivans vinkelacceleration $\overline{\alpha}$ vid tidpunkten då p når 10 rad/s. (3p)



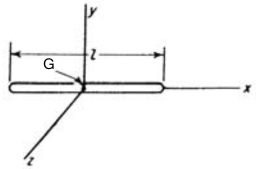
---

5 På en tunn stång sitter två små kulor som vardera har massan m. Systemet roterar med vinkelhastigheten ω runt z-axeln. Kulornas vinkelräta avstånd från rotationsaxeln är R och det vinkelräta avståndet från y-axeln är $\frac{1}{3}$L respektive $\frac{2}{3}$L. Bestäm, i det läge som figuren visar, dels systemets rörelseenergi T och dels systemets rörelsemängdsmoment $\overline{H_O}$. (3p)



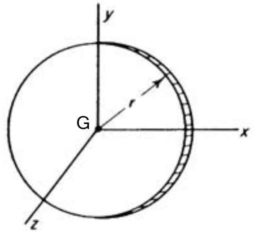
Masströghetsmoment

Stång:



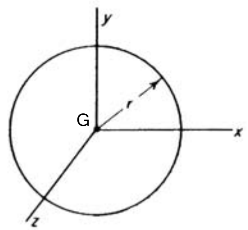
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = 0, \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{ml^2}{12}$$

Cirkelskiva:



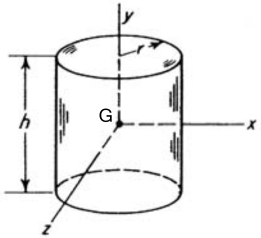
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{4}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{mr^2}{2}$$

Ring:



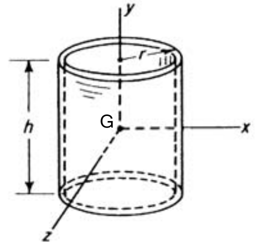
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = mr^2$$

Cirkulär cylinder:



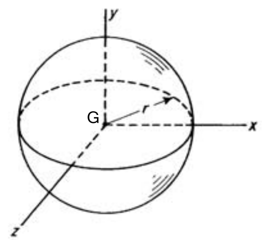
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}$$

Cirkulärt rör:



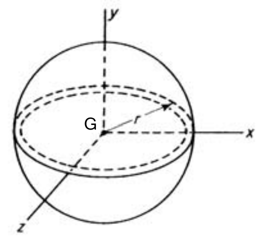
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(6r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = mr^2$$

Sfäriskt klot:



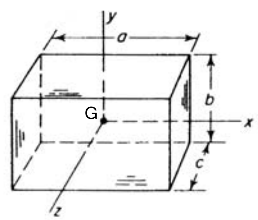
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Sfäriskt skal:



$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{3}mr^2$$

Rektangulärt block:



$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

2011-12-02

Formelblad TMMI39

Beteckningar:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: godtyckliga punkter

$\mathcal{P}$: fix punkt i rummet

$\mathcal{O}$: fix punkt i kroppen och i rummet

$\mathcal{G}$: masscentrum

$\overline{V}$: godtycklig vektor

$d_{\perp v}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{v}_{\mathcal{G}}$

$d_{\perp a}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{a}_{\mathcal{G}}$

$I_{\mathcal{G}-\mathcal{G}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ genom masscentrum

$I_{\mathcal{D}-\mathcal{D}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ parallell med axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$

d: vinkelräta avståndet mellan axlarna $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ och $\mathcal{D}-\mathcal{D}$

Kinematik

- Polära koordinater:

$$\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta, \qquad \overline{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

- Derivering i roterande koordinatsystem (xyz)

$$\dot{\overline{V}} \equiv \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/XYZ} = \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/xyz} + \overline{\Omega} \times \overline{V}$$

där $\overline{\Omega}$ är vinkelhastigheten hos xyz relativt XYZ

- Hastighet och accelerationssamband: Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\overline{v}_{\mathcal{B}} = \overline{v}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}$$
$$\overline{a}_{\mathcal{B}} = \overline{a}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}\right) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\mathcal{AB}}$$

Kinetik

- Kraft- och momentlagar

$$\Sigma\overline{F} = \dot{\overline{G}} = m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{P}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}} + \overline{\mathcal{AG}} \times m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$

- Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\alpha \pm m a_{\mathcal{G}} d_{\perp a}$$

- Förflyttningssatser

$$\overline{H}_{\mathcal{B}} = \overline{H}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{B}} = \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times \Sigma\overline{F}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\overline{H}_{\mathcal{G}} = \overline{\overline{I}}_{\mathcal{G}}\overline{\omega}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{O}} = \overline{\overline{I}}_{\mathcal{O}}\overline{\omega}$$
$$H_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\omega \pm m v_{\mathcal{G}} d_{\perp v} \qquad \text{(2D)}$$

- Arbete och energi

  Energibalans

  $$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

  där En kraft $\overline{F}$ resp. ett kraftparsmoment $\overline{C}$ utför arbetet

  $$U = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U = \int \overline{C} \cdot \overline{\omega} dt$$

  $$U = \int \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U = \int C\, d\theta \qquad \text{(2D)}$$

  Plan rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathcal{G}} \omega^2$$

  $$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{O}} \omega^2$$

  Tredimensionell rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m \overline{v}_{\mathcal{G}} \cdot \overline{v}_{\mathcal{G}} + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{H}_{\mathcal{G}}$$

  $$T = \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{H}_{\mathcal{O}}$$

- Impuls och impulsmoment

  $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{F} dt = \overline{G}_2 - \overline{G}_1 = m \overline{v}_{\mathcal{G}_2} - m \overline{v}_{\mathcal{G}_1}$$

  $$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}_{\mathcal{P}} dt = \overline{H}_{\mathcal{P}_2} - \overline{H}_{\mathcal{P}_1}, \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}_{\mathcal{G}} dt = \overline{H}_{\mathcal{G}_2} - \overline{H}_{\mathcal{G}_1}$$

- Tröghetssamband

  $$\overline{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

  $$I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2 \right) dm, \qquad I_{xy} = \int xy\, dm$$

  $$\overline{I}_A = \overline{I}_G + m \begin{pmatrix} {d_y}^2 + {d_z}^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & {d_x}^2 + {d_z}^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & {d_x}^2 + {d_y}^2 \end{pmatrix}$$

  $$\text{där} \quad \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \overline{\mathcal{G}\mathcal{A}} \quad (\text{eller } \overline{\mathcal{A}\mathcal{G}})$$

  $$I_{\mathcal{D}-\mathcal{D}} = I_{\mathcal{G}-\mathcal{G}} + md^2, \qquad I_{\mathcal{D}_{xy}} = I_{\mathcal{G}_{xy}} + m d_x d_y$$

Algebra

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a})$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}\, (\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}\, (\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin \varphi$$