

# TENTAMEN – MEKANIK MI, TMMI39, TEN 1

Torsdagen den 9 april 2015, klockan 14–19

## Kursadministratör

Anna Wahlund, anna.wahlund@liu.se, 013-281157

## Examinator

Joakim Holmberg

## Tentamensjour

Joakim Holmberg, joakim.holmberg@liu.se, 013-282338

## Besöker salen

15:30

## Antal uppgifter

5 stycken uppgifter, där varje uppgift ger maximalt 3 poäng

## Antal sidor

7 stycken (inklusive försättsblad)

## Hjälpmedel

Formelblad (medföljer tentamenstesen) samt räknedosa

## Betygsgränser

Summa poäng	Betyg
0–5	UK
6–8	3
9–11	4
12–15	5

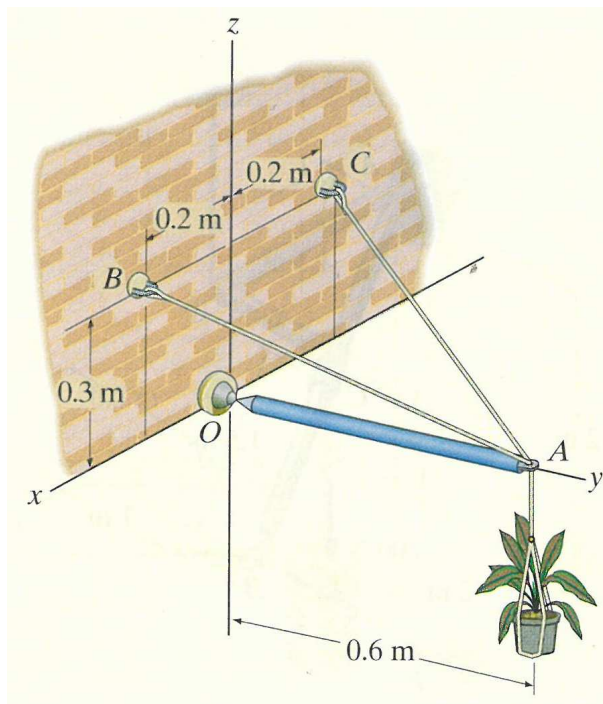
## Svar

Anslås på kurshemsidan efter skrivtidens slut

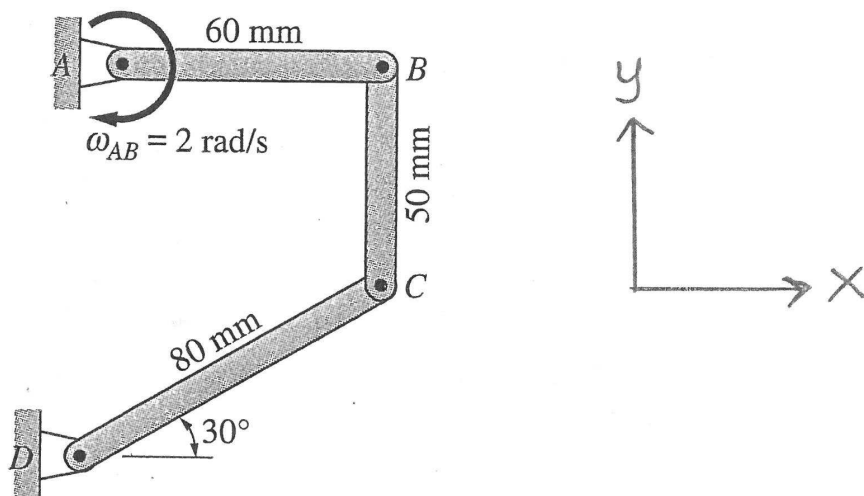
[http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor\\_Level/tmmi39/](http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor_Level/tmmi39/)

## TENTAMEN I MEKANIK F.K. (TMMI39)

- 1 Stången  $OA$ , vars massa kan försummas, påverkas av kraften  $-180\bar{k}$  N i punkten  $A$  på grund av blomkrukan. Stången hålls i läge av linorna  $AB$  och  $AC$ . I punkten  $O$  sitter stången fast i en kulle, som kan ta upp krafter i alla tre axelriktningar. Bestäm storleken på kraften i linorna  $AB$  och  $AC$ . (3p)

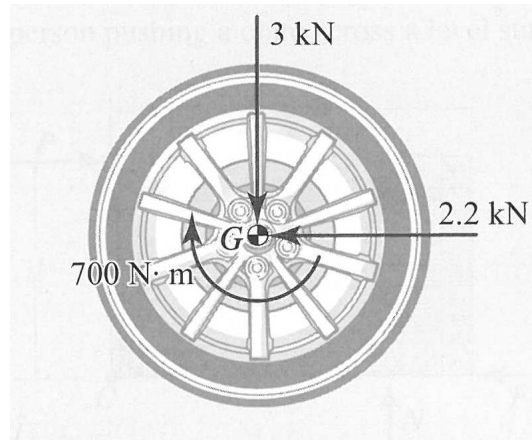


- 2 I det läge som figuren visar är vinkelhastigheten för länken  $AB$   $2 \text{ rad/s}$  medurs. Bestäm vinkelhastigheterna  $\omega_{BC}$  och  $\omega_{CD}$  till storlek och riktning. (3p)

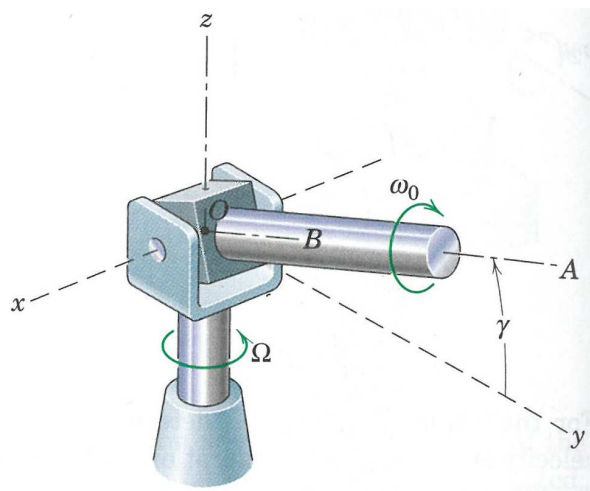


3 En bakhjulsdriven sportbil accelererar med konstant acceleration från 0 till 100 km/h. Bilens bakaxel påverkar vardera bakhjulet med en vertikal kraft, en horisontell kraft och ett moment (se figuren som visar ett av hjulen). Gravitationen påverkar hjulen med  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  vertikalt nedåt. Varje hjul har massan  $m = 20 \text{ kg}$ , masströghetsmomentet  $I_G = 1.3 \text{ kgm}^2$  och diametern  $0.6 \text{ m}$ .

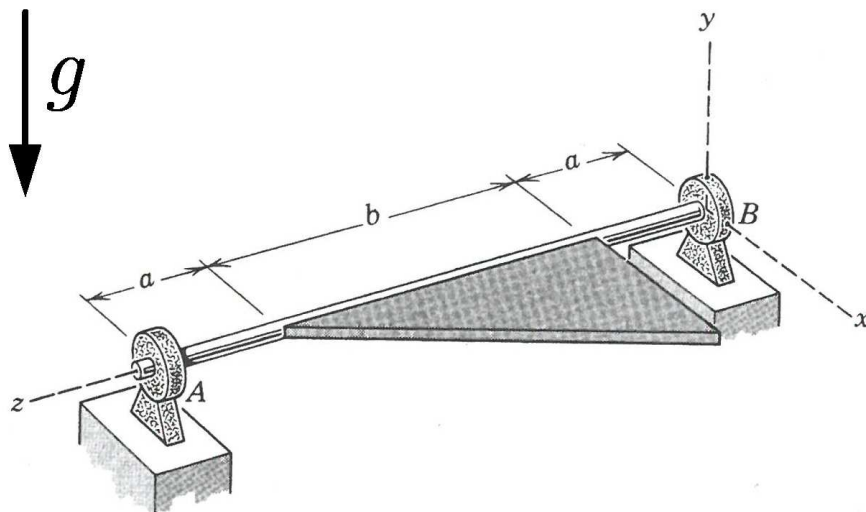
- Gör en komplett friläggning av hjulet på bilden. (1p)
- Bestäm den minsta statiska friktionskoefficienten som krävs för att hjulen ska rulla utan glidning. (1p)
- Åt vilket håll rullar bilen? Varför? (1p)



4 Den vertikala axeln med festsatt klyka roterar kring  $z$ -axeln med den konstanta vinkelhastigheten  $\Omega$ . Samtidigt roterar stängen  $B$  kring sin egen axel  $OA$  med den konstanta vinkelhastigheten  $\omega_0$  och vinkeln  $\gamma$  ökar konstant med  $\dot{\gamma}$ . Koordinatsystemet  $xyz$  sitter fast i klykan med origo i punkten  $O$ . Bestäm både vinkelhastighetsvektorn  $\vec{\omega}$  och vinkelaccelerationsvektorn  $\vec{\alpha}$  för stängen  $B$ . (3p)



- 5 En masslös axel roterar fritt i sina lagringar vid  $\mathcal{A}$  och  $\mathcal{B}$ . Lagret vid  $\mathcal{A}$  kan endast ta upp krafter i  $x$ - och  $y$ -led. Lagret vid  $\mathcal{B}$  kan ta upp krafter i  $x$ -,  $y$ - och  $z$ -led. En tunn triangulär platta med massan  $m$  är svetsad på axeln. Beräkna reaktionskraften vid  $\mathcal{A}$  precis då plattan släpps. (3p)



---

punkt.

## FORMELBLAD TMMI39

Beteckningar:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ : godtyckliga punkter

$\mathcal{P}$ : fix punkt i rummet

$\mathcal{O}$ : fix punkt i kroppen och i rummet

$\mathcal{G}$ : masscentrum

$\bar{V}$ : godtycklig vektor

$d_{\perp v}$ : vinkelräta avståndet mellan  $\mathcal{A}$  och  $\bar{v}_G$

$d_{\perp a}$ : vinkelräta avståndet mellan  $\mathcal{A}$  och  $\bar{a}_G$

$I_{G-\mathcal{G}}$ : masströghetsmoment m.a.p. axeln  $\mathcal{G}-\mathcal{G}$  genom masscentrum

$I_{\mathcal{D}-\mathcal{D}}$ : masströghetsmoment m.a.p. axeln  $\mathcal{D}-\mathcal{D}$  parallell med axeln  $\mathcal{G}-\mathcal{G}$

$d$ : vinkelräta avståndet mellan axlarna  $\mathcal{G}-\mathcal{G}$  och  $\mathcal{D}-\mathcal{D}$

### Kinematik

- Naturliga komponenter:

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{e}_t = \rho\dot{\beta}\bar{e}_t, \quad \bar{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\bar{e}_n + \ddot{s}\bar{e}_t$$

- Polära koordinater:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{e}_r + r\dot{\theta}\bar{e}_\theta, \quad \bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\bar{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\bar{e}_\theta$$

- Derivering i roterande koordinatsystem ( $xyz$ )

$$\dot{\bar{V}} \equiv \left( \frac{d\bar{V}}{dt} \right)_{/XYZ} = \left( \frac{d\bar{V}}{dt} \right)_{/xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{V}$$

där  $\bar{\Omega}$  är vinkelhastigheten hos  $xyz$  relativt  $XYZ$

- Hastighet och accelerationssamband: Låt  $\mathcal{A}$  och  $\mathcal{B}$  vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\begin{aligned} \bar{v}_B &= \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} \\ \bar{a}_B &= \bar{a}_A + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}}) + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{\mathcal{A}\mathcal{B}} \end{aligned}$$

### Kinetik

- Kraft- och momentlagar

$$\begin{aligned} \Sigma \bar{F} &= \dot{\bar{G}} = m\bar{a}_G \\ \Sigma \bar{M}_G &= \dot{\bar{H}}_G, \quad \Sigma \bar{M}_P = \dot{\bar{H}}_P, \quad \Sigma \bar{M}_A = \dot{\bar{H}}_G + \overline{\mathcal{A}\mathcal{G}} \times m\bar{a}_G \end{aligned}$$

- Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_G = I_G \alpha, \quad \Sigma M_O = I_O \alpha, \quad \Sigma M_A = I_G \alpha \pm m a_G d_{\perp a}$$

- Förflyttningssatser

$$\begin{aligned} \bar{H}_B &= \bar{H}_A + \overline{\mathcal{B}\mathcal{A}} \times m\bar{v}_G \\ \Sigma \bar{M}_B &= \Sigma \bar{M}_A + \overline{\mathcal{B}\mathcal{A}} \times \Sigma \bar{F} \end{aligned}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\begin{aligned} \bar{H}_G &= \bar{I}_G \bar{\omega}, \quad \bar{H}_O = \bar{I}_O \bar{\omega} \\ H_A &= I_G \omega \pm m v_G d_{\perp v} \quad (2D) \end{aligned}$$

- Arbete och energi

Energibalans

$$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

där En kraft  $\bar{F}$  resp. ett kraftparsmoment  $\bar{C}$  utför arbetet

$$\begin{aligned} U'_{1-2} &= \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 \bar{C} \cdot \bar{\omega} dt \\ U'_{1-2} &= \int_1^2 \bar{F} \cdot d\bar{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 C d\theta \quad (2D) \end{aligned}$$

Plan rörelse

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \\ T &= \frac{1}{2} I_O \omega^2 \end{aligned}$$

Tredimensionell rörelse

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \bar{v}_G \cdot \bar{v}_G + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{H}_G \\ T &= \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{H}_O \end{aligned}$$

- Impuls och impulsmoment

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{F} dt &= \bar{G}_2, \quad \bar{G} = m \bar{v}_G \\ \bar{H}_{P_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{M}_P dt &= \bar{H}_{P_2}, \quad \bar{H}_{G_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \bar{M}_G dt = \bar{H}_{G_2} \end{aligned}$$

- Tröghetssamband

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \\ I_{xx} &= \int (y^2 + z^2) dm, \quad I_{xy} = \int xy dm \\ \bar{I}_A &= \bar{I}_G + m \begin{pmatrix} d_y^2 + d_z^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & d_x^2 + d_z^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & d_x^2 + d_y^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{där} \quad \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \bar{\mathcal{G}}\bar{\mathcal{A}} \quad (\text{eller } \bar{\mathcal{A}}\bar{\mathcal{G}})$$

$$I_{D-D} = I_{G-G} + m d^2, \quad I_{D_{xy}} = I_{G_{xy}} + m d_x d_y$$

### Algebra

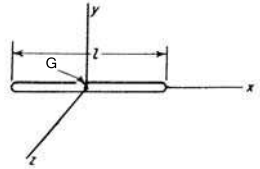
$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a})$$

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b})$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi$$

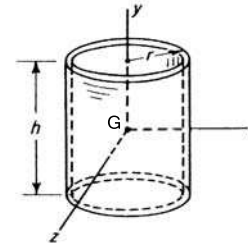
# Masströghetsmoment

Stång:



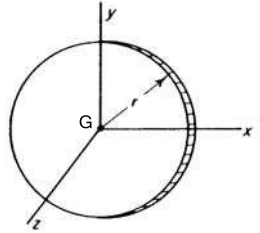
$$I_{G_{xx}} = 0, \quad I_{G_{yy}} = I_{G_{zz}} = \frac{ml^2}{12}$$

Cirkulärt rör:



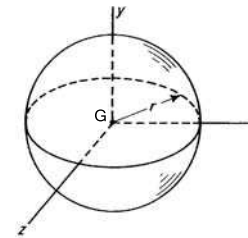
$$I_{G_{xx}} = I_{G_{zz}} = \frac{m}{12}(6r^2 + h^2), \quad I_{G_{yy}} = mr^2$$

Cirkelskiva:



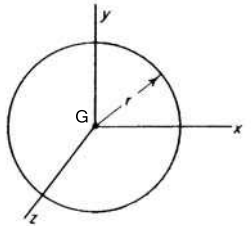
$$I_{G_{xx}} = I_{G_{yy}} = \frac{mr^2}{4}, \quad I_{G_{zz}} = \frac{mr^2}{2}$$

Sfäriskt klot:



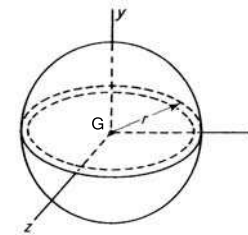
$$I_{G_{xx}} = I_{G_{yy}} = I_{G_{zz}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Ring:



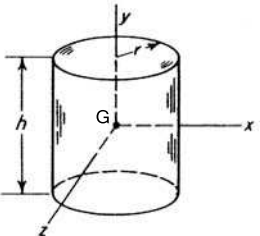
$$I_{G_{xx}} = I_{G_{yy}} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{G_{zz}} = mr^2$$

Sfäriskt skal:



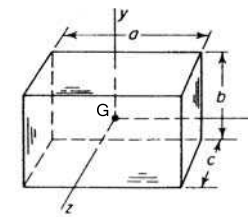
$$I_{G_{xx}} = I_{G_{yy}} = I_{G_{zz}} = \frac{2}{3}mr^2$$

Cirkulär cylinder:



$$I_{G_{xx}} = I_{G_{zz}} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2), \quad I_{G_{yy}} = \frac{mr^2}{2}$$

Rektangulärt block:



$$I_{G_{xx}} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_{G_{yy}} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_{G_{zz}} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$