Linköpings universitet
tekniska högskolan
IEI/mekanik

Tentamen – Mekanik MI, TMMI39, Ten 1

Onsdagen den 19 augusti 2015, klockan 8–13

Kursadministratör

Anna Wahlund, anna.wahlund@liu.se, 013-281157

Examinator

Joakim Holmberg

Tentamensjour

Joakim Holmberg, joakim.holmberg@liu.se, 013-282338

Besöker salen

9:15

Antal uppgifter

5 stycken uppgifter, där varje uppgift ger maximalt 3 poäng

Antal sidor

7 stycken (inklusive försättsblad)

Hjälpmedel

Formelblad (medföljer tentamenstesen) samt räknedosa

Betygsgränser

Summa poäng	Betyg
0–5	UK
6–8	3
9–11	4
12–15	5

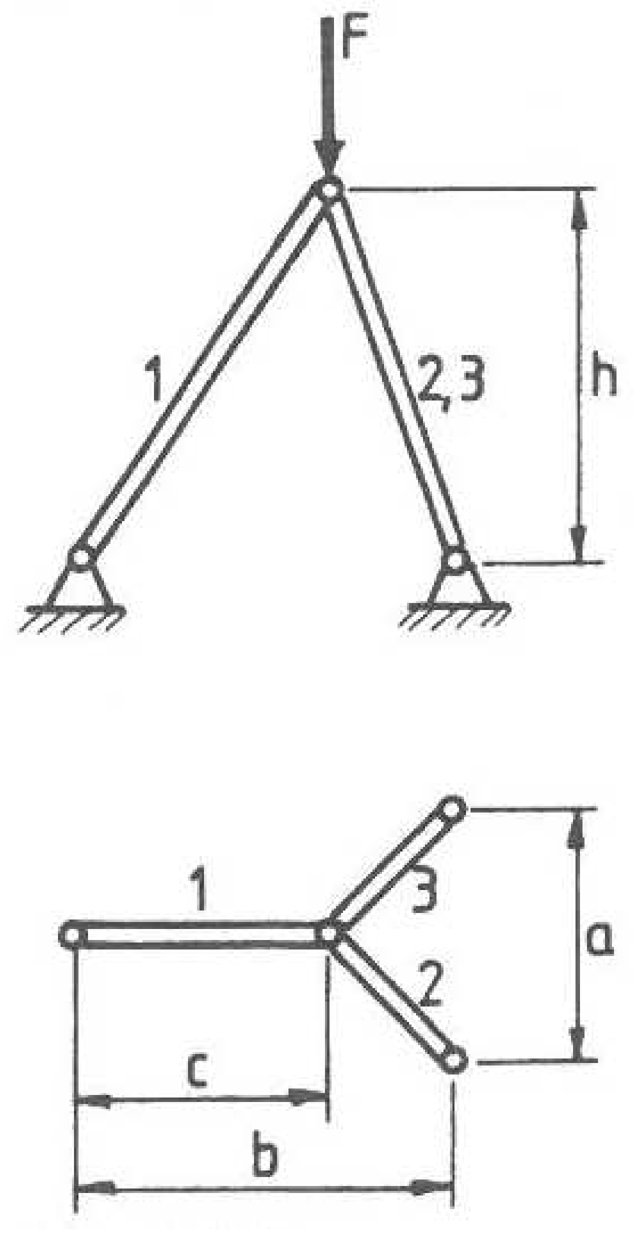
Svar

Anslås på kurshemsidan efter skrivtidens slut
http://www.solidmechanics.iei.liu.se/Examiners/Courses/Bachelor_Level/tmmi39/

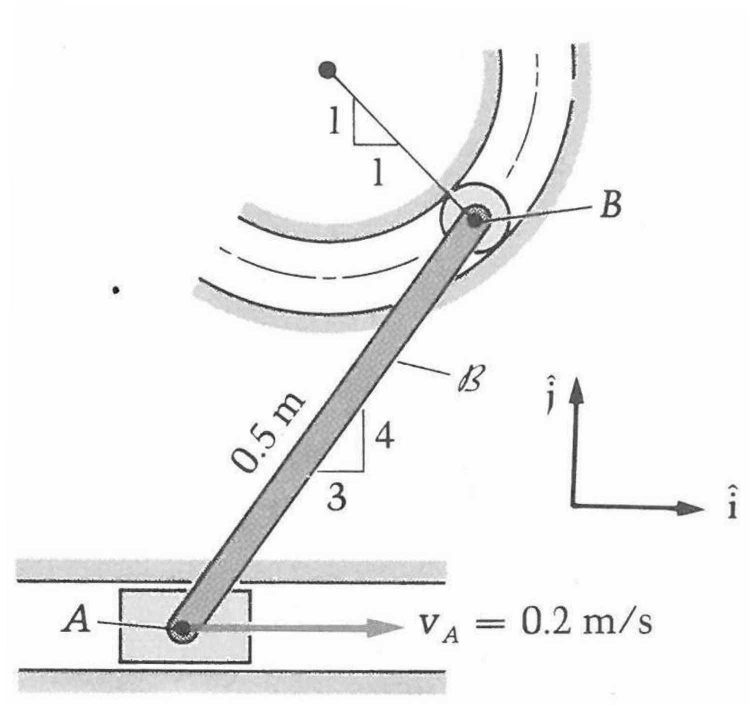
2015-08-19

Tentamen i Mekanik f.k. (TMMI39)

1 En ställning består av tre stänger. I varje knutpunkt sitter det en kulled, vilken kan ta upp krafter i alla tre axelriktningar. Ställningen belastas med kraften $F = 3000$ N enligt figur. Relationerna för måtten är: $h = b = \frac{3}{2}a = \frac{3}{2}c$. Bestäm storleken på stångkrafterna S_1, S_2 och S_3. (3p)

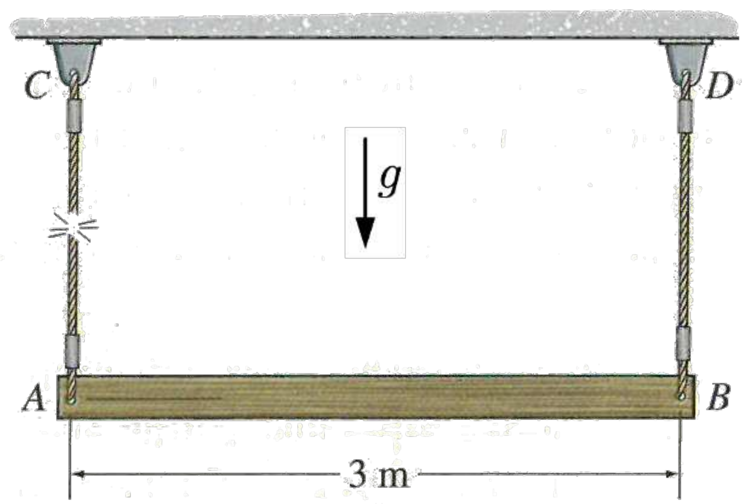


2 I det läge som figuren visar har punkten $\mathcal{A}$ hastigheten $\overline{v}_{\mathcal{A}} = 0.2\overline{i}$ m/s. Punkten $\mathcal{B}$ är styrd till att röra sig längs den cirkulära bana som figuren visar. Bestäm hastighetsvektorn $\overline{v}_{\mathcal{B}}$. (3p)

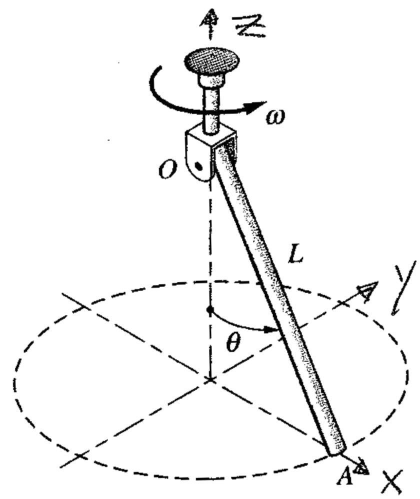


---

3 Stången $\mathcal{AB}$, med massan $m = 62$ kg och längden $L = 3$ m, hänger horisontellt i två snören och befinner sig i vila. Bestäm stångens vinkelaccelerationsvektor, $\overline{\alpha}_{\mathcal{AB}}$, och dragkraften i snöret $\mathcal{BD}$, $S_{\mathcal{BD}}$, omedelbart efter att snöret $\mathcal{AC}$ klipps av. (3p)

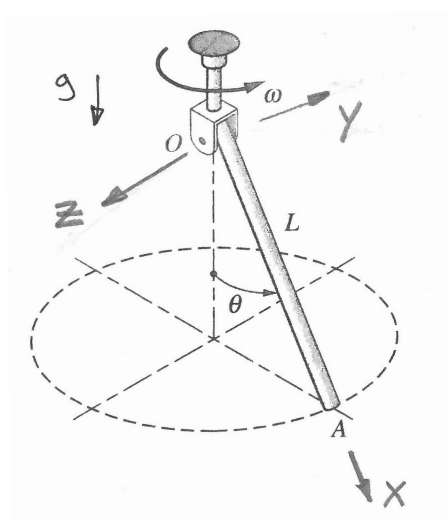


4 Den vertikala axeln med fastsatt klyka roterar med vinkelhastigheten ω och vinkelaccelerationen $\dot{\omega}$. Koordinatsystemet xyz sitter fast i den vertikala axeln och följer klykans rotation. Samtidigt roterar stången $\mathcal{OA}$ kring klykans sprint i $\mathcal{O}$. Vinkeln θ ökar med vinkelhastigheten $\dot{\theta}$ och vinkelaccelerationen $\ddot{\theta}$. Bestäm både vinkelhastighetsvektorn och vinkelaccelerationsvektorn för stången $\mathcal{OA}$, dvs $\overline{\omega}_{\mathcal{OA}}$ och $\overline{\alpha}_{\mathcal{OA}}$. (3p)



---

5 Stången $\mathcal{OA}$ med massan m och längden L är via en friktionsfri sprint i $\mathcal{O}$ fastsatt i det vertikala skaftet som roterar med den konstanta vinkelhastigheten ω. Bestäm vinkeln θ mellan $\mathcal{OA}$ och vertikalen. Koordinatsystemet xyz sitter fast i stången $\mathcal{OA}$ vid punkten $\mathcal{O}$. x-axeln löper axiellt längs stången $\mathcal{OA}$ och z-axeln löper axiellt längs sprinten. (3p)



---

punkt.

Formelblad TMMI39

Beteckningar:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: godtyckliga punkter

$\mathcal{P}$: fix punkt i rummet

$\mathcal{O}$: fix punkt i kroppen och i rummet

$\mathcal{G}$: masscentrum

$\overline{V}$: godtycklig vektor

$d_{\perp v}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{v}_{\mathcal{G}}$

$d_{\perp a}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{a}_{\mathcal{G}}$

$I_{\mathcal{G}-\mathcal{G}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ genom masscentrum

$I_{\mathcal{D}-\mathcal{D}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ parallell med axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$

d: vinkelräta avståndet mellan axlarna $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ och $\mathcal{D}-\mathcal{D}$

Kinematik

- Naturliga komponenter:

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{e}_t = \rho\dot{\beta}\overline{e}_t, \qquad \overline{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{e}_n + \ddot{s}\overline{e}_t$$

- Polära koordinater:

$$\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta, \qquad \overline{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

- Derivering i roterande koordinatsystem (xyz)

$$\dot{\overline{V}} \equiv \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/XYZ} = \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/xyz} + \overline{\Omega} \times \overline{V}$$

där $\overline{\Omega}$ är vinkelhastigheten hos xyz relativt XYZ

- Hastighet och accelerationssamband: Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\overline{v}_{\mathcal{B}} = \overline{v}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}$$
$$\overline{a}_{\mathcal{B}} = \overline{a}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}\right) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\mathcal{AB}}$$

Kinetik

- Kraft- och momentlagar

$$\Sigma\overline{F} = \dot{\overline{G}} = m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{P}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}} + \overline{\mathcal{AG}} \times m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$

- Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\alpha \pm m a_{\mathcal{G}} d_{\perp a}$$

- Förflyttningssatser

$$\overline{H}_{\mathcal{B}} = \overline{H}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{B}} = \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times \Sigma\overline{F}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\overline{H}_{\mathcal{G}} = \overline{I}_{\mathcal{G}}\overline{\omega}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{O}} = \overline{I}_{\mathcal{O}}\overline{\omega}$$
$$H_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\omega \pm m v_{\mathcal{G}} d_{\perp v} \qquad \text{(2D)}$$

- Arbete och energi

  Energibalans

  $$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

  där En kraft $\overline{F}$ resp. ett kraftparsmoment $\overline{C}$ utför arbetet

  $$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{C}\cdot\overline{\omega} dt$$

  $$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F}\cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 C\, d\theta \qquad \text{(2D)}$$

  Plan rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathcal{G}} \omega^2$$

  $$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{O}} \omega^2$$

  Tredimensionell rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m \overline{v}_{\mathcal{G}}\cdot\overline{v}_{\mathcal{G}} + \frac{1}{2} \overline{\omega}\cdot\overline{H}_{\mathcal{G}}$$

  $$T = \frac{1}{2} \overline{\omega}\cdot\overline{H}_{\mathcal{O}}$$

- Impuls och impulsmoment

  $$\overline{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{F} dt = \overline{G}_2, \quad \overline{G} = m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$

  $$\overline{H}_{\mathcal{P}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}} dt = \overline{H}_{\mathcal{P}_2}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{G}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}} dt = \overline{H}_{\mathcal{G}_2}$$

- Tröghetssamband

  $$\overline{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

  $$I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm, \qquad I_{xy} = \int xy\, dm$$

  $$\overline{I}_A = \overline{I}_G + m \begin{pmatrix} {d_y}^2 + {d_z}^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & {d_x}^2 + {d_z}^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & {d_x}^2 + {d_y}^2 \end{pmatrix}$$

  $$\text{där} \quad \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \overline{\mathcal{G}\mathcal{A}} \quad (\text{eller } \overline{\mathcal{A}\mathcal{G}})$$

  $$I_{\mathcal{D}\text{–}\mathcal{D}} = I_{\mathcal{G}\text{–}\mathcal{G}} + md^2, \qquad I_{\mathcal{D}_{xy}} = I_{\mathcal{G}_{xy}} + m d_x d_y$$

Algebra

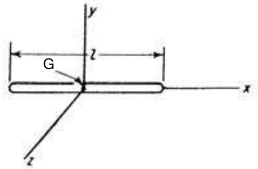
$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a})$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}\, (\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}\, (\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$$

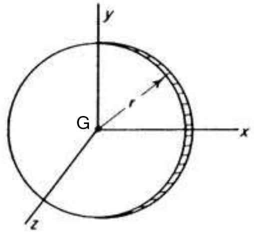
Masströghetsmoment

Stång:



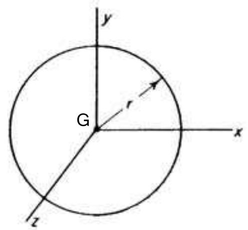
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = 0, \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{ml^2}{12}$$

Cirkelskiva:



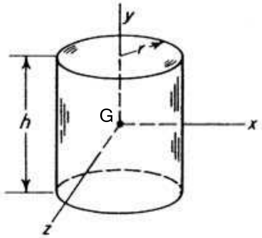
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{4}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{mr^2}{2}$$

Ring:



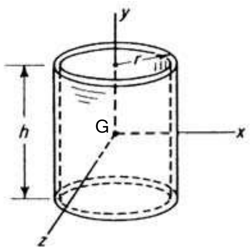
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = mr^2$$

Cirkulär cylinder:



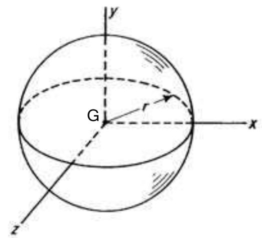
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}$$

Cirkulärt rör:



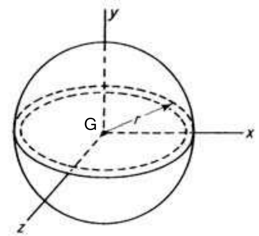
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(6r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = mr^2$$

Sfäriskt klot:



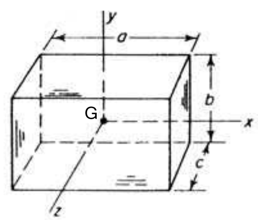
$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Sfäriskt skal:



$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{3}mr^2$$

Rektangulärt block:



$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$