# Tentamen i Mekanik MI f.k. (TMMI39)

17 januari 2014, kl. 8.00 till 13.00

| | |
|---|---|
| Tentamenskod: | TEN1 |
| Tentamenssal: | ................ |
| Examinator: | Stefan Lindström |
| Tentamensjour: | Stefan Lindström (013-281127, 073-6374572) besöker salen kl. 9.00 samt kl. 11.30. |
| Kursadministratör: | Anna Wahlund (013-281157; anna.wahlund@liu.se) |
| Antal uppgifter: | 5 |
| Hjälpmedel: | Räknedosa (formelblad bifogas) |

Problemen är ej ordnade efter svårighetsgrad. Maximal poäng på tentamen är 15 poäng. För godkänt krävs 6 poäng. Betygsgränserna för tentamen är

| *Poängsumma* | *Betyg* |
|---|---|
| 12–15 | 5 |
| 9–11 | 4 |
| 6–8 | 3 |
| 0–5 | U |

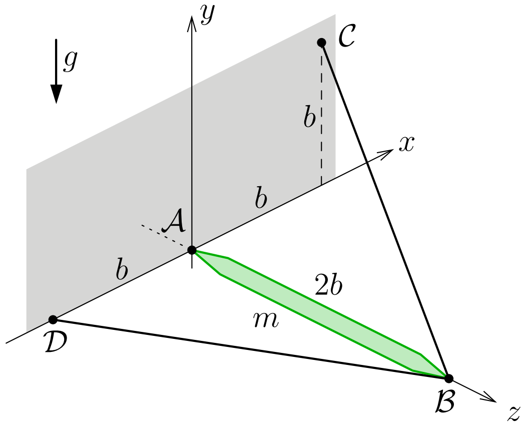
Instruktioner:

- Varje steg i lösningen ska motiveras.
- Rita stora tydliga figurer.
- Använd ej rödpenna.
- Kontrollera svarens dimension och rimlighet.

Svar anslås på kursens hemsida efter skrivningstillfället. Rättningsgranskning sker på IEI:s studerandeexpedition i hus A, ingång 19C. Eventuella klagomål skall vara skriftliga (ej e-post) och lämnas in senast 21 februari 2014.

Totalt antal sidor inklusive försättsblad och formelblad: 7.

**Uppgift 1** (3 poäng)**.** En stång med längden $2b$ och massan $m$ är upphängd med en kulled i sin ena ände $\mathcal{A}$ och med två snören i sin andra ände $\mathcal{B}$, allt enligt den måttsatta figuren. Bestäm snörkraften $T$ i snöret $\mathcal{BD}$. ($m$, $b$ och $g$ betraktas som givna konstanter.)

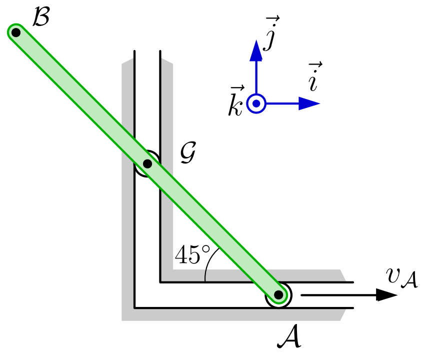



**Uppgift 2** (3 poäng)**.** Rörelsen hos en stång med längden $\ell = 1{,}0\,\mathrm{m}$ styrs av två spår enligt figuren. Det ena spåret styr stångens ändpunkt $\mathcal{A}$, det andra styr stångens mittpunkt $\mathcal{G}$. Stångens ändpunkt $\mathcal{A}$ ges en konstant fart $v_{\mathcal{A}} = 2{,}0\,\mathrm{m/s}$ åt höger i figuren. För det avbildade läget, bestäm

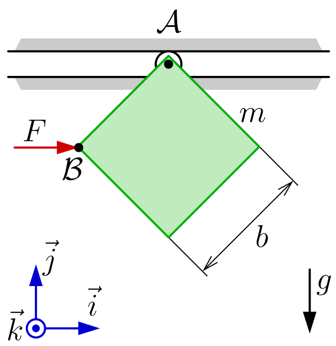
a. vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ för stången.

b. vinkelaccelerationen $\vec{\alpha}$ för stången.

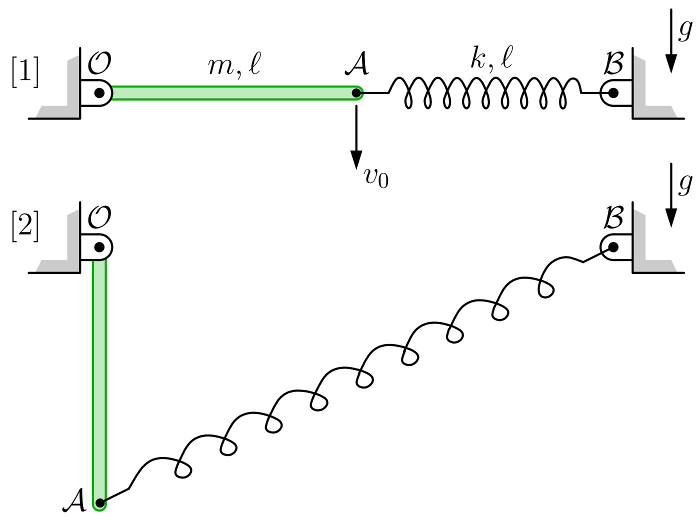
c. accelerationen $\vec{a}_{\mathcal{B}}$ hos punkten $\mathcal{B}$ på stången.



**Uppgift 3** (3 poäng)**.** En kvadratisk skiva med massan $m$ och sidan $b$ är med sitt ena hörn $\mathcal{A}$ ledat infäst i ett litet hjul som löper friktionsfritt i ett horisontellt spår. Skivan hänger i vila när en horisontell kraft med beloppet $F$ läggs på hörnet $\mathcal{B}$. Beräkna accelerationen $\vec{a}_{\mathcal{A}}$ hos punkten $\mathcal{A}$ omedelbart efter det att kraften $F$ lagts på.



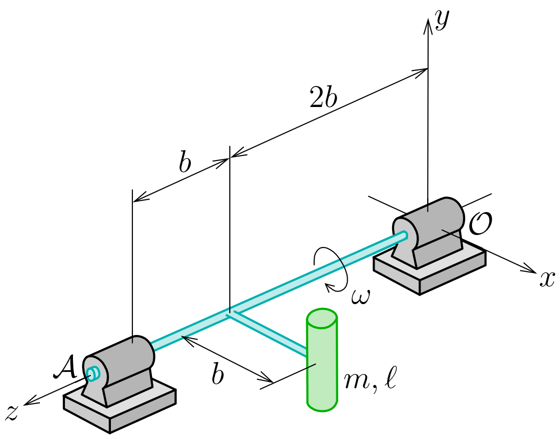

**Uppgift 4** (3 poäng)**.** En stång $\mathcal{OA}$ med massan $m$ och längden $\ell$ är ihopkopplad vid $\mathcal{A}$ med en fjäder $\mathcal{AB}$ med fjäderkonstanten $k$ och den naturliga (ospända) längden $\ell$. I startläget [1] är stången och fjädern båda horisontella, fjädern är ospänd och punkten $\mathcal{A}$ rör sig nedåt med farten $v_0$. Bestäm fjäderkonstanten $k$ så att stången vänder i läge [2], där den är lodrät.



**Uppgift 5** (3 poäng)**.** En masslös axel är monterad mellan två lager $\mathcal{O}$ och $\mathcal{A}$, och roterar med en konstant vinkelhastighet $\omega$. Inget av lagren tar upp något kraftparsmoment. Lagret $\mathcal{O}$ kan ta upp krafter i $x$-, $y$- och $z$-riktningen, medan lagret $\mathcal{A}$ endast kan ta upp krafter i $x$- och $y$-riktningen. På axeln är en tunn stång med längden $\ell$ och massan $m$ fastsvetsad enligt figuren. För det avbildade läget, beräkna

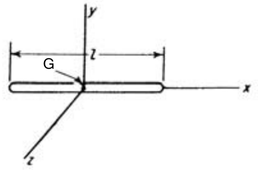
a. rörelsemängdsmomentet $\vec{H}_{\mathcal{O}}$.

b. kraften på axeln vid punkten $\mathcal{A}$ om tyngdkraften försummas.



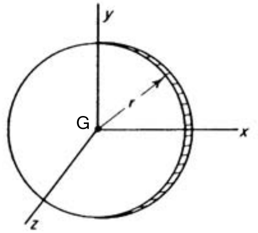
# Masströghetsmoment

Stång:



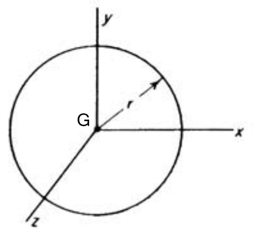

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = 0, \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{ml^2}{12}$$

Cirkelskiva:



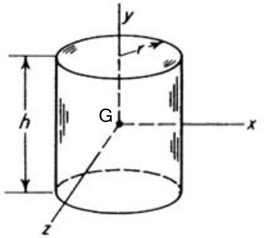

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{4}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{mr^2}{2}$$

Ring:



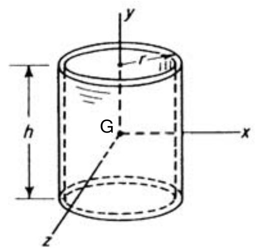

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = mr^2$$

Cirkulär cylinder:



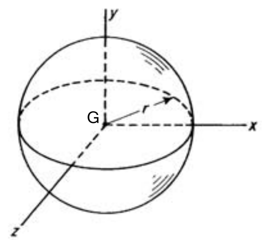

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(3r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{mr^2}{2}$$

Cirkulärt rör:



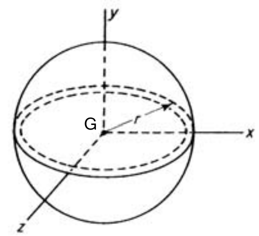

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}\left(6r^2 + h^2\right), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = mr^2$$

Sfäriskt klot:



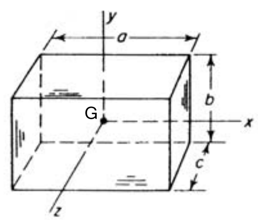

$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{5}mr^2$$

Sfäriskt skal:




$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = I_{\mathcal{G}_{yy}} = I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{2}{3}mr^2$$

Rektangulärt block:




$$I_{\mathcal{G}_{xx}} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{yy}} = \frac{m}{12}(a^2 + c^2), \quad I_{\mathcal{G}_{zz}} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$$

# Formelblad TMMI39

Beteckningar:

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$: godtyckliga punkter

$\mathcal{P}$: fix punkt i rummet

$\mathcal{O}$: fix punkt i kroppen och i rummet

$\mathcal{G}$: masscentrum

$\overline{V}$: godtycklig vektor

$d_{\perp v}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{v}_{\mathcal{G}}$

$d_{\perp a}$: vinkelräta avståndet mellan $\mathcal{A}$ och $\overline{a}_{\mathcal{G}}$

$I_{\mathcal{G}-\mathcal{G}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ genom masscentrum

$I_{\mathcal{D}-\mathcal{D}}$: masströghetsmoment m.a.p. axeln $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ parallell med axeln $\mathcal{G}-\mathcal{G}$

$d$: vinkelräta avståndet mellan axlarna $\mathcal{G}-\mathcal{G}$ och $\mathcal{D}-\mathcal{D}$

---

**Kinematik**

- Naturliga komponenter:

$$\overline{v} = \dot{s}\overline{e}_t = \rho\dot{\beta}\overline{e}_t, \qquad \overline{a} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\overline{e}_n + \ddot{s}\overline{e}_t$$

- Polära koordinater:

$$\overline{v} = \dot{r}\overline{e}_r + r\dot{\theta}\overline{e}_\theta, \qquad \overline{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overline{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\overline{e}_\theta$$

- Derivering i roterande koordinatsystem $(xyz)$

$$\dot{\overline{V}} \equiv \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/XYZ} = \left(\frac{d\overline{V}}{dt}\right)_{/xyz} + \overline{\Omega} \times \overline{V}$$

där $\overline{\Omega}$ är vinkelhastigheten hos $xyz$ relativt $XYZ$

- Hastighet och accelerationssamband: Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara fixa punkter i en stel kropp. Då gäller

$$\overline{v}_{\mathcal{B}} = \overline{v}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}$$
$$\overline{a}_{\mathcal{B}} = \overline{a}_{\mathcal{A}} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{\mathcal{AB}}\right) + \dot{\overline{\omega}} \times \overline{\mathcal{AB}}$$

**Kinetik**

- Kraft- och momentlagar

$$\Sigma\overline{F} = \dot{\overline{G}} = m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{G}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{P}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{P}}, \qquad \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} = \dot{\overline{H}}_{\mathcal{G}} + \overline{\mathcal{AG}} \times m\overline{a}_{\mathcal{G}}$$

- Momentlagar (2D)

$$\Sigma M_{\mathcal{G}} = I_{\mathcal{G}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{O}} = I_{\mathcal{O}}\alpha, \qquad \Sigma M_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\alpha \pm m a_{\mathcal{G}} d_{\perp a}$$

- Förflyttningssatser

$$\overline{H}_{\mathcal{B}} = \overline{H}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times m\overline{v}_{\mathcal{G}}$$
$$\Sigma\overline{M}_{\mathcal{B}} = \Sigma\overline{M}_{\mathcal{A}} + \overline{\mathcal{BA}} \times \Sigma\overline{F}$$

- Rörelsemängdsmoment

$$\overline{H}_{\mathcal{G}} = \overline{I}_{\mathcal{G}}\overline{\omega}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{O}} = \overline{I}_{\mathcal{O}}\overline{\omega}$$
$$H_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{G}}\omega \pm m v_{\mathcal{G}} d_{\perp v} \qquad \text{(2D)}$$

- Arbete och energi

  Energibalans

  $$T_1 + V_{g1} + V_{e1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g2} + V_{e2}$$

  där En kraft $\overline{F}$ resp. ett kraftparsmoment $\overline{C}$ utför arbetet

  $$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{C} \cdot \overline{\omega} dt$$

  $$U'_{1-2} = \int_1^2 \overline{F} \cdot d\overline{r} \quad \text{resp.} \quad U'_{1-2} = \int_1^2 C\, d\theta \qquad \text{(2D)}$$

  Plan rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m v_{\mathcal{G}}^2 + \frac{1}{2} I_{\mathcal{G}} \omega^2$$

  $$T = \frac{1}{2} I_{\mathcal{O}} \omega^2$$

  Tredimensionell rörelse

  $$T = \frac{1}{2} m \overline{v}_{\mathcal{G}} \cdot \overline{v}_{\mathcal{G}} + \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{H}_{\mathcal{G}}$$

  $$T = \frac{1}{2} \overline{\omega} \cdot \overline{H}_{\mathcal{O}}$$

- Impuls och impulsmoment

  $$\overline{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{F} dt = \overline{G}_2, \quad \overline{G} = m \overline{v}_{\mathcal{G}}$$

  $$\overline{H}_{\mathcal{P}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}_{\mathcal{P}} dt = \overline{H}_{\mathcal{P}_2}, \qquad \overline{H}_{\mathcal{G}_1} + \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}_{\mathcal{G}} dt = \overline{H}_{\mathcal{G}_2}$$

- Tröghetssamband

  $$\overline{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

  $$I_{xx} = \int \left(y^2 + z^2\right) dm, \qquad I_{xy} = \int xy\, dm$$

  $$\overline{I}_A = \overline{I}_G + m \begin{pmatrix} {d_y}^2 + {d_z}^2 & -d_x d_y & -d_x d_z \\ -d_x d_y & {d_x}^2 + {d_z}^2 & -d_y d_z \\ -d_x d_z & -d_y d_z & {d_x}^2 + {d_y}^2 \end{pmatrix}$$

  $$\text{där} \quad \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \overline{\mathcal{GA}} \quad (\text{eller } \overline{\mathcal{AG}})$$

  $$I_{\mathcal{D}\text{–}\mathcal{D}} = I_{\mathcal{G}\text{–}\mathcal{G}} + md^2, \qquad I_{\mathcal{D}_{xy}} = I_{\mathcal{G}_{xy}} + m d_x d_y$$

**Algebra**

$$\overline{a} \cdot (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b} \cdot (\overline{c} \times \overline{a})$$

$$\overline{a} \times (\overline{b} \times \overline{c}) = \overline{b}\,(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}\,(\overline{a} \cdot \overline{b})$$

$$|\overline{a} \times \overline{b}| = |\overline{a}||\overline{b}| \sin\varphi$$